U. PORTO

FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

29 de Maio de 2023

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Separe as respostas às questões $1-4$ das respostas às questões $5-7$.

1. (2 valores)

Considere a sucessão real de termo geral, $a_n = \dfrac{1}{10^{n-1}}$.

(a) Determine os valores de a e b de tal forma que esta sucessão seja defnida de forma recursiva por:

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = ba_n, \quad n > 1 \end{cases}$$

(b) Classifique a sucessão relativamente à monotonia, justificando devidamente.

(c) Determine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(d) Indique valor lógico da seguinte proposição. Justifique a sua resposta.

$$\exists K, M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in N \quad : \quad K \leq a_n \leq M$$

2. (4,5 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x}$.

(a) Indique o domínio de f e determine, caso existam, os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas.

(b) Verifique se existem assímptotas horizontais, verticais ou oblíquas de f.

(c) Indique se f é uma função par ou ímpar.

(d) Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.

(e) Analise a concavidade da função e determine os pontos de inflexão, caso existam.

(f) Com base na informação obtida nas alíneas anteriores, faça um esboço do gráfico de f.

3. (2,5 valores)

Considere a função $g(x) = \ln(\dfrac{2}{x} - 1)$.

(a) Determine o domínio de g e os pontos x desse conjunto onde $g(x) \geq 1$.

(b) Resolva a equação $g(x) = -\ln(x^{-1})$.

4. (3 valores)

(a) Calcule o valor exato de: $\tan\left(\frac{31\pi}{3}\right) + 2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.

(b) Considere a função $f(x) = 3 - 2\cos(x)$, com domínio $x \in [-2\pi, 2\pi]$. Indique o valor máximo que f pode tomar e indique os pontos onde esse máximo é atingido.

5. (2 valores)

(a) Considere o número complexo $z = 1 + 8i$. Determine o produto $z\bar{z}$, onde $\bar{z}$ é o conjugado de z.

(b) Considere o complexo $z = 1 + i$. Escreva este número na forma exponencial e determine z^{14} dando o resultado na sua forma algébrica, $a + bi$.

6. (3 valores)

(a) Faça um esboço da região no plano definida pela condição seguinte, indicando os pontos relevantes.

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 1 \ \wedge \ x \geq -1 \ \wedge \ y \geq x + 2$$

(b) Considere num referencial ortonormado $x0y$ uma reta r que interseta o eixo $0x$ no ponto de abcissa 2 e que interseta o eixo $0y$ no ponto de ordenada 8. Determine a equação da reta r.

7. (2 valores)

Os 3 irmãos Andrade e os 4 irmãos Martins vão escolher, de entre eles, dois elementos de cada família para um jogo de matraquilhos, de uma família contra a outra.

(a) De quantas formas diferentes pode pode ser feita a escolha dos jogadores?

(b) De quantas formas diferentes pode pode ser feita a escolha dos jogadores de modo que o Carlos, o mais velho dos irmãos da família Andrade, seja um dos escolhidos?

Nota: Nesta questão deverá efetuar todos os cálculos.

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b-\sin a\sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$(e^u)' = u'e^u$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(u+v)' = u'+v'$

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$

$(\sin(u))' = u'\cos(u)$

$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\tfrac{\theta+2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,...,n-1\}$$